

XLII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

FASE LOCAL-COMUNIDAD DE MADRID

Primera sesión, viernes 25 de noviembre de 2005

- [En la hoja de respuestas](#), rodea con un círculo la opción que creas correcta en cada pregunta. Si decides cambiarla, táchala con una cruz y escoge otra.
- Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos, cada respuesta en blanco 2 puntos y cada respuesta errónea, 0 puntos.
- No están permitidas calculadoras ni ningún aparato de medida.
- Tiempo: 3 horas.

1. Una librería vende novelas a 10 € cada una, pero si compras 4, te regalan 1. Ana quiere 7 novelas y Beatriz 8. ¿Cuánto se ahorran si compran entre las dos las 15 en lugar de cada una las suyas?

- A) 10 € B) 20 € C) 30 € D) 40 €
E) 50 €.

2. La media aritmética de 20 números es 30 y la de otros 30 números es 20. ¿Cuál es la media aritmética de esos 50 números?

- A) 23 B) 24 C) 25 D) 26
E) 27.

3. Juan vive a 13 km de distancia de su amiga Julia. Ayer salió Juan en bicicleta, desde su casa a casa de Julia. Un poco más tarde, salió Julia también en bicicleta hacia la casa de Juan. Cuando se encontraron, Juan había estado el doble de tiempo que Julia en bicicleta y su velocidad había sido un poco menor, exactamente cuatro quintos de la velocidad que había llevado Julia. ¿Cuántos kilómetros había recorrido Julia desde que salió hasta que encontró a Juan?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7
E) 8.

4. Al restar a un número de dos cifras la suma de éstas, obtengo un número que acaba en 6. ¿Cuántos números de dos cifras tienen esta propiedad?

- A) 7 B) 9 C) 10 D) 19
E) 29.

5. ¿Cuántos números de 3 cifras tienen la propiedad de que la cifra del medio es la media aritmética de las de los extremos?

- A) 41 B) 42 C) 43 D) 44
E) 45.

6. El número de enteros positivos n que verifican

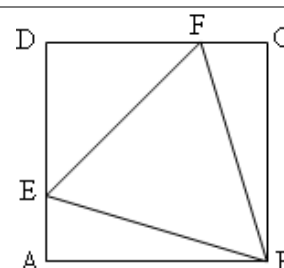
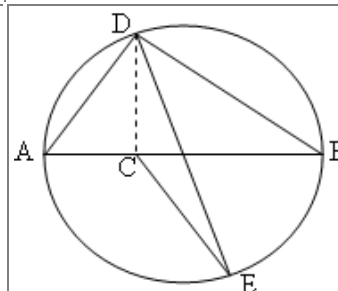
que $2^{200} < n^{100} < (130n)^{50}$ es:

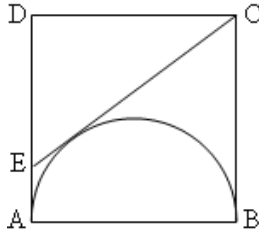
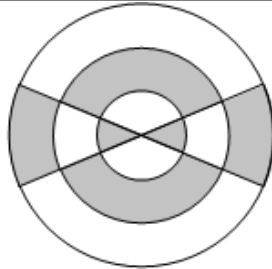
- A) 0 B) 7 C) 12 D) 65
E) 125.

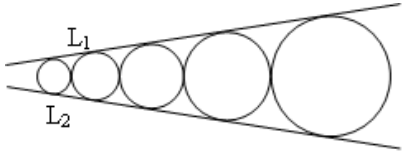
7. ¿Cuántos cubos perfectos distintos de 1 son divisores de $3!5!7!?$

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

E) 6.
8. Tengo tres tarjetas marcadas con “C” y dos tarjetas marcadas con “O”. Si las ordeno al azar en una fila, ¿cuál es la probabilidad de obtener la serie “COCOC”? A) $1/12$ B) $1/10$ C) $1/6$ D) $1/4$ E) $1/3$
9. Los números siguientes ..., a, b, c, d, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... son términos consecutivos de una sucesión en la que cada término es la suma de los dos que están a su izquierda. El valor de a es: A) -3 B) -1 C) 0 D) 1 E) 3.
10. Sea AB un diámetro de una circunferencia y C un punto de él con $2AC = BC$. Si D y E son extremos de otro diámetro, de forma que DC es perpendicular a AB, el cociente entre el área del triángulo DCE y el área del triángulo ABD es: A) $1/6$ B) $1/4$ C) $1/3$ D) $1/2$ E) $2/3$
11. Decimos que un número es “casi primo” si no es primo pero no es divisible ni por 2, ni por 3, ni por 5. Como puedes ver, los tres “casi primos” más pequeños son, 49, 77 y 91. Si hay 168 números primos menores que 1000, ¿cuántos “casi primos” hay menores que 1000? A) 100 B) 102 C) 104 D) 106 E) 108.
12. Un cuentakilómetros caótico pasa del dígito 3 al 5, es decir, se salta el 4 sea cual fuere la posición en la que esté. Por ejemplo, si marca 000253, después de recorrer 1 km marcaría 000255 y si marca 000039, después de recorrer 1 km marcaría 000050. Si al comienzo de un viaje lo ponemos a 000000 y al final marca 002005, ¿cuántos kilómetros se han recorrido realmente? A) 1404 B) 1462 C) 1604 D) 1605 E) 1804.
13. En la figura adjunta, ABCD es un cuadrado y BEF un triángulo equilátero. ¿Cuál es el cociente entre el área del triángulo DEF y el área del triángulo ABE? A) $5/3$ B) $7/3$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) $1 + \sqrt{3}$
14. Hay dos valores de “a” para los que la ecuación, de incógnita x, $4x^2 + ax + 8x + 9 = 0$ tiene una solución doble. ¿Cuál es la suma de estos dos valores de “a”? A) -16 B) -8 C) 0 D) 8 E) 20.
15. Si los números x e y verifican $-4 \leq X \leq -2$, $2 \leq Y \leq 4$ ¿Cuál es



$\frac{X+Y}{X}$? el menor valor posible para A) - 1/2 B) - 2/3 C) -1 D) - 4/3 E) 0.	
16. Tres números están en progresión aritmética siendo el primero de ellos el 9. Si le sumamos 2 al segundo y 20 al tercero, los tres números resultantes están en progresión geométrica. ¿Cuál es el menor valor posible para el tercer término de esta progresión geométrica? A) 1 B) 4 C) 36 D) 49 E) 81.	
17. El lado del cuadrado ABCD de la figura tiene longitud 2. Con diámetro el lado AB, trazamos una circunferencia de la que CE es tangente. ¿Cuál es la longitud de CE? A) $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{6}$ D) 5/2 E) $5-\sqrt{5}$.	
18. En una fiesta cada chico bailó con 3 chicas y cada chica con 2 chicos. Si había 12 chicos en la fiesta, ¿cuántas chicas había? A) 8 B) 12 C) 16 D) 18 E) 24.	
19. Tiramos una moneda 3 veces y otra 4 veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener el mismo número de caras en una y en la otra? A) 19/128 B) 23/128 C) 1/4 D) 35/128 E) 1/2.	
20. Los círculos que ves tienen radios 1, 2 y 3 y el área de la región sombreada es 8/13 del área de la región sin sombreada. ¿Qué ángulo forman los dos diámetros que las atraviesan? A) $\frac{\pi}{8}$ B) $\frac{\pi}{7}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{\pi}{5}$ E) $\frac{\pi}{4}$.	
21. Si en la sucesión $a_1, a_2, a_3, \dots$ se verifica que $a_1 = 1$, $a_{2n} = n \cdot a_n$, ¿cuánto vale $a_{2^{100}}$? A) 1; B) 2^{99}; C) 2^{100}; D) 2^{4950}; E) 2^{9999}	
22. Archibaldo y Benedicto son dos jugadores de tenis de un nivel exageradamente parecido. Juegan un partido a 5 sets, es decir, gana quien gane 3 sets y la probabilidad de que cualquiera de los dos gana cualquier set es . Si Benedicto ganó el 2º set y Archibaldo ganó el partido, ¿cuál es la probabilidad de que Benedicto hubiera ganado el 1er set? A) 1/8 B) 1/6 C) 1/5 D) 1/4 E) 1/3.	
23. De los puntos del plano (x, y) representados por las siguientes ecuaciones, ¿cuáles tienen la misma gráfica? I: $y = x - 2$;	

II: $y = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$; III: $(x + 2)y = x^2 - 4$. A) Solamente I y II B) Solamente I y III C) Solamente II y III D) Las tres E) Ninguno, todos tienen gráficas diferentes.	
24. ¿Cuál es el valor de la expresión $\frac{1}{\log_2 100!} + \frac{1}{\log_3 100!} + \frac{1}{\log_4 100!} + \dots + \frac{1}{\log_{100} 100!}$? A) 0,01 B) 0,1 C) 1 D) 2 E) 0.	
25. Si $\log_7(\log_3(\log_2 x)) = 0$, entonces $x^{-\frac{1}{2}}$ es igual a: A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ C) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ D) $\frac{1}{\sqrt{42}}$ E) Nada de lo anterior	
26. En la figura adjunta se observa que las cinco circunferencias tangentes entre sí, además son tangentes a las rectas L1 y L2. Si el radio de la circunferencia pequeña es 8 y el de la mayor 18, el radio de la del medio es: A) 12 B) 12,5 C) 13 D) 13,5 E) 14.	
27. Si f es una función polinómica tal que para todo x es $f(x^2 + 1) = x^4 + 5x^2 + 3$, entonces $f(x^2 - 1)$ es igual a: A) $x^4 + 5x^2 + 1$ B) $x^4 + x^2 - 3$ C) $x^4 - 5x^2 + 1$ D) $x^4 + x^2 + 3$ E) Nada de lo anterior.	
28. Una circunferencia de centro (0, k) con $k > 6$, es tangente a las rectas $y = 6$, $y = x$, $y = -x$. ¿Cuánto mide su radio? A) $6\sqrt{2} + 8$ B) $6\sqrt{2} + 6$ C) $(1 + 2\sqrt{2})^2$ D) $(3\sqrt{2} - 1)^2$ E) Nada de lo anterior.	
29. Si las raíces de la ecuación $x^2 + mx + n = 0$ son x_1 y x_2 y verifican $x_1 = 2y_1$; $x_2 = 2y_2$, siendo y_1 e y_2 las raíces de la ecuación $x^2 + px + m = 0$ con $m \cdot n \cdot p \neq 0$, ¿cuánto vale $\frac{n}{p}$? A) -4 B) 4 C) -2 D) 6 E) 8.	
30. Considera los puntos del plano A(2, 2) y B(7, 7) y la región R formada por los puntos C del primer cuadrante tales que el triángulo ABC es acutángulo. De los siguientes enteros, ¿cuál es el más próximo al área de la región R? A) 25 B) 39 C) 51 D) 60 E) 80.	