

Números irracionales

- 1 Desarrolla la siguiente expresión

$$(2\sqrt{7} + 3)^2 - 4\sqrt{7}(\sqrt{3} + 3) =$$

- 2 Opera y simplifica, sacando factores de las raíces, dando el resultado en la forma más sencilla posible.

a) $3\sqrt{128} - 2\sqrt{32} + 3\sqrt{72} =$

b) $2\sqrt[3]{16} - 5\sqrt[3]{54} + \frac{1}{5}\sqrt[3]{250} =$

- 3 Simplifica la siguiente expresión

$$\frac{\sqrt[3]{135} + 12\sqrt[3]{40} - 4\sqrt[3]{625}}{4\sqrt[3]{5} - 6\sqrt[3]{320}} =$$

- 4 Racionalizar

a) $\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}} =$

b) $\frac{3}{\sqrt[5]{3^2}} =$

c) $\frac{3}{\sqrt[8]{5^3}} =$

d) $\frac{3}{\sqrt[5]{7^3}} =$

e) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{x}}{\sqrt{2} + \sqrt{x}} =$

- 5 Racionaliza, opera y simplifica:

a) $\sqrt[3]{81} : \sqrt[3]{3} =$

b) $\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3} + 1} =$

c) $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5} - 3} + \frac{\sqrt{5}}{22} =$

d) $\frac{6}{\sqrt{48} - 6} + \frac{3}{\sqrt{3}} =$

- 6 Racionaliza la siguiente expresión

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1} =$$

- 7 Expresa en forma de potencia, efectúa las operaciones y simplifica las siguientes expresiones

a) $16^{1/4} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{4}} =$

b) $\sqrt{\frac{5\sqrt[3]{6}}{\sqrt[4]{15}}} =$

Polinomios

- 8 Factoriza el siguiente polinomio.

$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 6x + 4$$

- 9 Factoriza el siguiente polinomio:

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

- 10 Factoriza el siguiente polinomio.

$$P(x) = 2x^4 - x^3 + 10x^2 - 5x$$

- 11 Las soluciones de $x^2 + bx + c = 0$ son $x = 2$ y $x = 3$. Halla b y c .

- 12 Halla el valor de a para que la división $(x^4 - 3x + a) : (x - 2)$ tenga resto 23.

- 13 Halla el valor de k para que el polinomio $5x^4 + x^2 - kx - 4$ sea divisible entre $x - 2$.

- 14 Encuentra un polinomio de segundo grado con las siguientes propiedades

- $P(0) = -5$
- Tiene como raíz $x = -1$
- Da resto 9 al dividirlo por $x + 2$

- 15 Encuentra un polinomio de segundo grado con las siguientes propiedades

- $P(1) = 2$
- Tiene como raíz $x = 2$
- Da resto 3 al dividirlo por $x + 1$

- 16 Encuentra un polinomio de tercer grado con las siguientes propiedades:

- Valor numérico 5 en $x = 1$
- Tiene como raíz doble $x = 0$
- Da resto 8 al dividirlo por $x + 2$

- 17 Encuentra un polinomio de segundo grado con las siguientes propiedades

- $P(1) = 2$
- Da resto 2 al dividirlo por $x - 1$
- Tiene una raíz doble.

- 18 Calcula el valor de m para que el polinomio $P(x) = x^2 + 7x + m$ tenga dos soluciones enteras consecutivas.

Expresiones Algebraicas

- 19) Opera, simplificando todo lo posible.

a) $\frac{2}{x+1} - \frac{2x+3}{x^2-1} =$

b) $\frac{x-1}{2x+6} : \frac{x^2-1}{-3x-3} =$

c) $\frac{3x-1}{x^2-9} - \frac{3}{x+3} =$

d) $\frac{x-1}{2x+6} : \frac{x^2-1}{-3x-9} =$

- 20) Halla la fracción irreducible equivalente a las siguientes expresiones.

a) $\frac{9x^2-12x+4}{9x^2-4} =$

b) $\frac{x^2+6x+9}{2x+6} =$

c) $\frac{x^3-19x-30}{x^3-3x^2-10x} =$

- 21) Simplifica la siguiente expresión algebraica

$$\left(x+1-\frac{x^2}{x-1}\right) : \left(1-\frac{x}{x-1}\right) =$$

- 22) Desarrolla la siguiente expresión utilizando el binomio de Newton

$$\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^4 =$$

Ecuaciones

- 23 Resuelve la siguiente ecuación polinómica.

$$x^3 - 12x^2 + 21x + 98 = 0$$

- 24 Resuelve la siguiente ecuación polinómica.

$$2x^5 + 3x^4 - 2x^3 = 3x^2$$

- 25 Resuelve la siguiente ecuación irracional.

$$\sqrt{3x - 5} + 1 = x$$

- 26 Resuelve la siguiente ecuación irracional.

$$3x - 3\sqrt{x + 3} = x + 3$$

- 27 Resuelve la siguiente ecuación irracional.

$$\sqrt{x^2 + 9} + x^2 = 21$$

- 28 Resuelve la siguiente ecuación irracional.

$$\sqrt{2x - 1} - \sqrt{2x - 4} = 3$$

- 29 Resuelve la siguiente ecuación exponencial.

$$5^{2x} = 2 \cdot 5^x + 15$$

- 30 Resuelve la siguiente ecuación exponencial.

$$9^x = 45 + 4 \cdot 2 \cdot 3^{x+1}$$

- 31 Resuelve la siguiente ecuación exponencial.

$$3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 13$$

- 32 Resuelve la siguiente ecuación exponencial.

$$3^{2x+1} - 3^{x+2} = 162$$

- 33 Resuelve la siguiente ecuación exponencial.

$$3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 351$$

- 34) Resuelve la siguiente ecuación exponencial.

$$2^x + 2^{x+1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 864$$

- 35) Resuelve la siguiente ecuación logarítmica.

$$\log_2 (x^2 - 1) = 3$$

- 36) Resuelve la siguiente ecuación logarítmica.

$$3 \cdot \log_2 x - \log_2 (x^2 + x - 4) = 2$$

- 37) Resuelve la siguiente ecuación logarítmica.

$$\log(x-1) + \log(x-2) + \log(x-3) = \log(6)$$

- 38) Resuelve la siguiente ecuación logarítmica.

$$\log_2 (x) + \log_4 (x) + \log_8 (x) = 11$$

- 39) Resuelve la siguiente ecuación logarítmica.

$$\frac{\log(4x-3)}{\log(6x^2+1)} = \frac{1}{2}$$

- 40) Resuelve la siguiente ecuación logarítmica.

$$\log x = \frac{1}{2} \log \left(2x + \frac{5}{2} \right) + \frac{1}{2} \log 2$$

- 41) Resuelve la siguiente ecuación logarítmica.

$$\log_2(3x+1) - \log_2(x+1) = 1 - \log_2(2x-1)$$

- 42) Resuelve la siguiente ecuación logarítmica.

$$\log 2 + \log(11 - x^2) = 2 \log(5 - x)$$

- 43) Resuelve la siguiente ecuación logarítmica.

$$2 \log x - \log(x+6) = 3 \log 2$$

Sistemas

- 44) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x + y = 52 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 10 \end{cases}$$

- 45) Resuelve el siguiente sistema

$$\begin{cases} x + y = 22 \\ \log_{10} x - \log_{10} y = 1 \end{cases}$$

- 46) Resuelve el siguiente sistema

$$\begin{cases} \log_x (y - 18) = 2 \\ \log_y (x + 3) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- 47) Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 24 \\ 2^{x+y} = 128 \end{cases}$$

- 48) Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3^x + 3^y = 36 \\ 3^{x+y} = 243 \end{cases}$$

- 49) Resuelve el siguiente sistema mediante el método de Gauss.

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x - y + z = 7 \\ x + 2y - z = 6 \end{cases}$$

Problemas de ecuaciones

- 50 En un parking hay 37 vehículos entre coches, motos y camiones de 6 ruedas. El número de motos excede en 3 al de coches y camiones juntos. Halla el número de vehículos de cada clase si en total suman 118 ruedas (sin tener en cuenta las de repuesto).
- 51 En un cine hay tres salas, A, B y C. Los precios de entrada a estas salas son de 3, 4 y 5 euros, respectivamente. Un día la recaudación conjunta de las tres salas fue de 720 euros y el número total de espectadores fue de 200. Si los espectadores de la sala A hubieran asistido a la sala B y los de la sala B a la sala A, se hubiese obtenido una recaudación de 20 euros más. Calcula el número de espectadores que acudió a cada una de las salas.
- 52 Calcular las edades de un padre y sus dos hijos sabiendo que: entre los tres suman 55 años. Cuando nació el hijo pequeño la edad del padre siete veces la del hijo mayor. Cuando el pequeño tenga la edad del mayor, la edad del padre será el triple de la edad del mayor.
- 53 Un hijo le dice a su padre: *'Cuando yo tenga tu edad, tu tendrás el triple de la edad que yo tengo ahora.'* *'¡Qué curioso!'*, contesta el padre, *'Hace once años mi edad era el triple de la tuya.'* Calcula la edad actual del padre y del hijo.
- 54 Pepe y Pepa mantienen la siguiente conversación
- PEPA: 'Tienes mucho más dinero que yo, dame la mitad de lo tuyo'.
 - PEPE: 'Toma la mitad de lo que tengo, ahora eres tú quien tiene 20 euros más que yo. Dame ahora la mitad de lo que tu tienes'.
 - PEPA: 'Toma la mitad de lo que tengo ahora. Vuelves a tener más dinero que yo, pero solamente 10 euros de diferencia, y no la diferencia que había al principio.
- ¿Cuánto dinero tenía cada uno al principio?
- 55 Un padre reparte una cantidad de gominolas entre sus tres hijos de la siguiente manera
- Al mayor le da la mitad de las gominolas más una.
 - Al segundo le da la mitad de las gominolas que quedan más una.
 - Al menor le da el resto de las gominolas.
- ¿Cuántas gominolas tenía el padre si el mayor recibe cuatro veces más que el pequeño?
- 56 Un individuo hace un viaje de 920 km en su coche. Su velocidad es de 80 km/h cuesta arriba, 120 km/h cuesta abajo y 100 km/h en llano. A la ida emplea 9 horas en el viaje y al volver por el mismo camino emplea 10 horas. ¿Cuántos kilómetros hace cuesta arriba? ¿Cuántos kilómetros hace en llano? ¿Cuántos kilómetros hace cuesta abajo?
- 57 Un rey reparte una bolsa de monedas de oro entre sus tres hijos y su mujer de la siguiente manera.
- Divide el número de monedas en cuatro partes y le da una parte a su mujer y una parte al hijo mayor.
 - Después, divide las monedas restantes en tres partes y le da una parte a su mujer y una parte al hijo mediano.

- Finalmente, divide las monedas restantes en dos partes y le da una parte a su mujer y otra parte al hijo pequeño.

Si llamamos x a la cantidad que recibe el menor, indica la cantidad de monedas que la mujer y la cantidad de monedas que recibe cada hijo. ¿Cuántas monedas tenía la bolsa si sabemos que la madre recibe 120 monedas mas que el hijo pequeño?

IES Pradolongo

Inecuaciones

- 58) Resuelve la siguiente inecuación, expresando el resultado en forma de intervalo:

$$\frac{x^2}{5} + \frac{x}{3} > \frac{x^2}{15} + \frac{1}{5}$$

- 59) Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{2x-2}{5} + \frac{5-2x}{3} < 1 \\ \frac{x+2}{3} - \frac{2x-3}{4} > \frac{3}{4} \end{cases}$$

- 60) Representa la región del plano determinada por las siguientes inecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 5y \leq 15 \\ x + y \leq 6 \\ 5x - 7y \leq 42 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

e identifica los vértices de la región anterior.

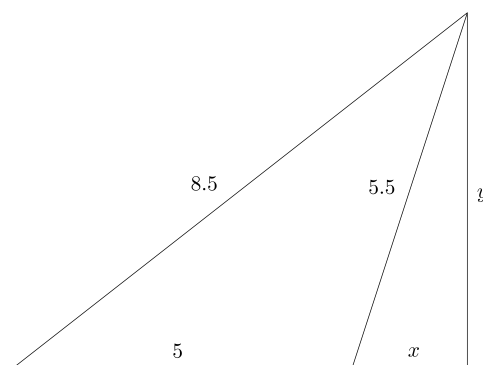
- 61) Resuelve gráficamente el siguiente sistema de inecuaciones, indicando claramente la región solución.

$$\begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x - y \geq -1 \\ y \geq -2 \end{cases}$$

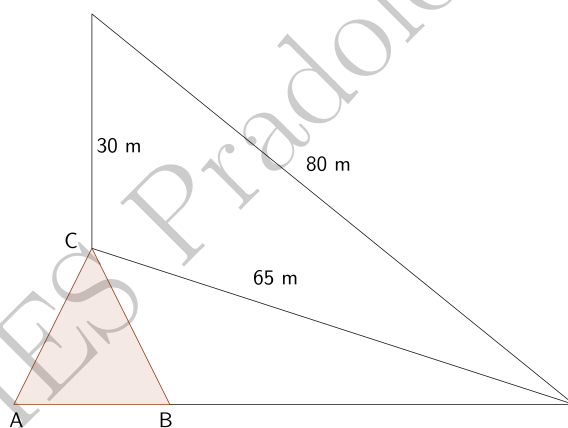
- 62) En una fábrica de televisores se fabrican dos modelos, A y B. Para atender a sus clientes, deben fabricar entre 200 y 1000 unidades del tipo A y menos de 500 del tipo B, de manera que entre los dos sumen menos de 1200 unidades. Dibuja la región factible (puntos del plano que son solución) asociada al problema. ¿cuál de las dos siguientes producciones es factible: 400 de A y 600 de B o 600 de A y 400 de B?

Trigonometría

- 63) Calcula los valores de x e y en la siguiente figura. Todos los datos están dados en metros.



- 64) Calcula la altura sobre la horizontal del triángulo ABC en la construcción de la siguiente figura.



- 65) Simplifica la siguiente expresión trigonométrica

$$\frac{\tan(x) \cdot \cos(x) + \tan^3(x) \cdot \cos(x)}{\sec^2(x)}$$

- 66) Determina si la siguiente identidad es cierta o falsa.

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{cosec}(\alpha) - \operatorname{cotang}(\alpha)} = 1 + \cos(\alpha)$$

- 67) Calcula el valor de la siguiente expresión. (Nota: debe razonarse la obtención del valor de la respuesta. Una expresión decimal no será considerada como válida).

$$\cos(75^\circ) + \operatorname{sen}(105^\circ) =$$

- 68) Dada la siguiente ecuación trigonométrica

$$\cos(2x) - \cos(6x) = \operatorname{sen}(5x) + \operatorname{sen}(3x)$$

Se pide:

- Expresa cada lado de la ecuación como un producto de razones trigonométricas
- Resuelve la ecuación trigonométrica

- 69) Resolver la siguiente ecuación trigonométrica

$$6 \cos^2 x + 6 \operatorname{sen}^2 x = 5 + \operatorname{sen} x$$

- 70) Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica

$$\operatorname{sen}(2x) \cdot \cos(x) = 6 \operatorname{sen}^3(x)$$

- 71) Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica.

$$\operatorname{tang}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

- 72) Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica.

$$\cos^2(x) = 3 \operatorname{sen}^2(x)$$

- 73) Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica

$$\tan(2x) \cdot \tan(x) = 1$$

- 74) Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica

$$\operatorname{sen}(2x + 60^\circ) + \operatorname{sen}(x + 30^\circ) = 0$$

- 75) Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica.

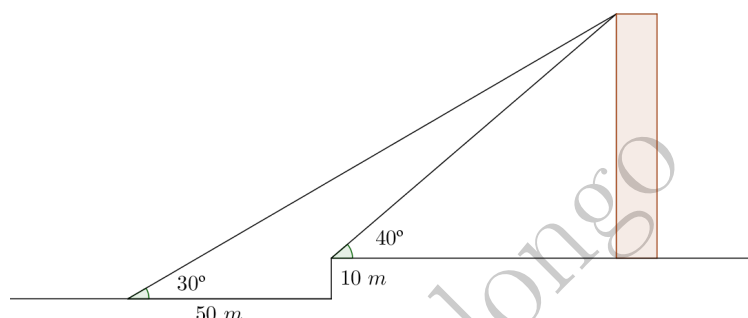
$$\operatorname{sen}(5x) - \operatorname{sen}(3x) = \cos(5x) + \cos(3x)$$

- 76) Resuelve el siguiente sistema

$$\begin{cases} x + y = 90^\circ \\ \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

Trigonometría. Problemas

- 77 Para calcular la altura de la pirámide de Keops nos alejamos 50 metros de su base y observamos la cúspide bajo un ángulo de 40° . Nos alejamos otros 50 metros y observamos la cúspide bajo un ángulo de 33° . ¿Cuál es la altura de la pirámide? ¿Cuál es la base de la pirámide?
- 78 Desde un punto situado en un terreno irregular se observa lo alto de una torre bajo un ángulo de 30° . Acercándonos 50 metros y salvando el desnivel de 10 metros se observa lo alto de la torre bajo un ángulo de 40° . ¿Cuál es la altura de la torre?

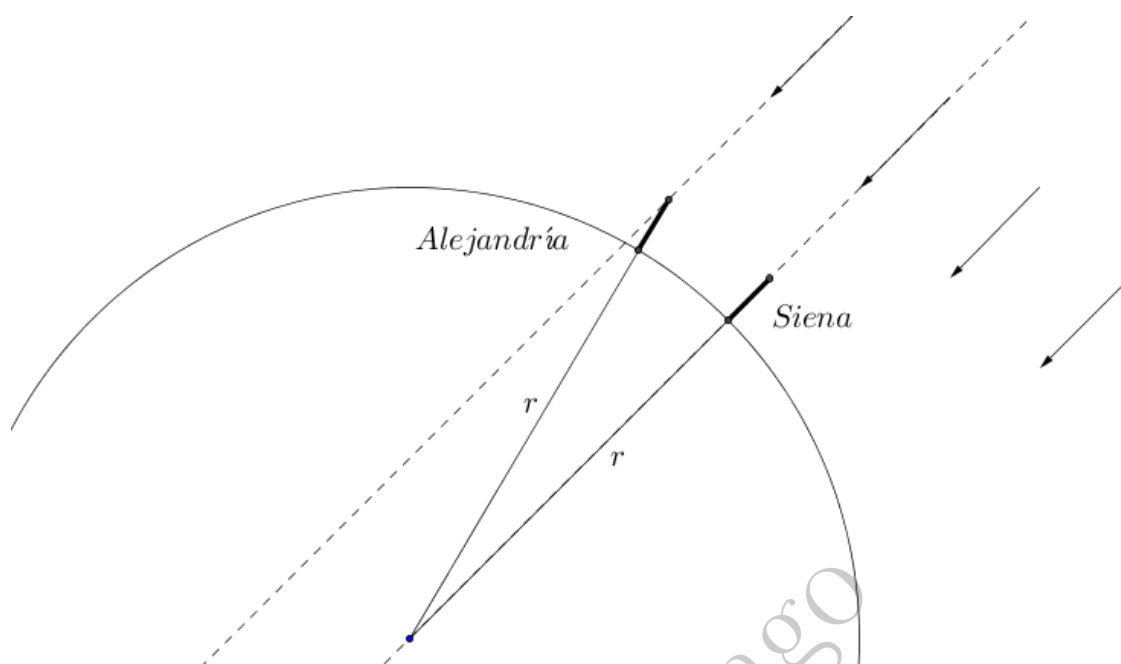


- 79 En una circunferencia de 1 metro de radio trazamos una cuerda que une los extremos de un arco de 110° . Calcula la distancia del centro de la circunferencia a la cuerda.
- 80 En una de las orillas de un río hay un pedestal de 60 metros de altura sobre el que se apoya una estatua de 9 metros de alto. Halla la anchura del río, sabiendo que desde un punto de la otra orilla opuesto al pedestal, se ve la estatua bajo el mismo ángulo con el que se vería a un hombre de 1,80 metros de alto situado delante del pedestal.
- 81 Problema de Eratóstenes (based on a true story)

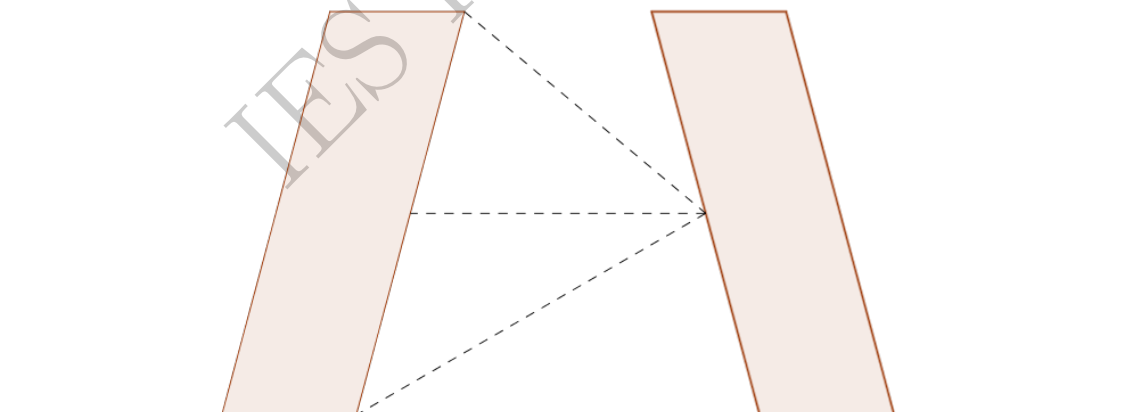
Eratóstenes nació en Cirene en el año 276 a. C. Fue matemático, astrónomo y geógrafo. Una de sus principales contribuciones a la ciencia y a la astronomía fue su trabajo sobre la medición de la Tierra. Estando en la Biblioteca de Alejandría, encontró un informe de observaciones sobre Siena, ciudad situada a unos 800 Km. al sur de Alejandría, en el que se decía que el día del solsticio de verano (21 de junio) a mediodía, los objetos (como por ejemplo, los obeliscos) no producían sombra y en el fondo de los pozos podía verse la luz del sol. Esto se debe a que esta ciudad está sobre la línea del trópico (en realidad, $33'$ al norte del Trópico de Cáncer).

Eratóstenes realizó observó que, en Alejandría, el mismo día y a la misma hora no se producía este mismo hecho. Asumió de manera correcta que el Sol se encontraba a gran distancia y que sus rayos, al alcanzar la tierra, lo hacían en forma (prácticamente) paralela. Esto ratificaba su idea de que la superficie de la Tierra era curva pues, de haber sido plana, no se hubiese producido esta diferencia entre las dos ciudades.

El siguiente paso fue medir en Alejandría el ángulo que formaban los rayos del sol con la vertical, que resultó ser de $7'2^\circ$. La distancia entre las dos ciudades era de 5.000 estadios. Sabiendo que un estadio equivale a 160 metros, ¿cuál es el valor que obtuvo Eratóstenes para el radio de la Tierra?

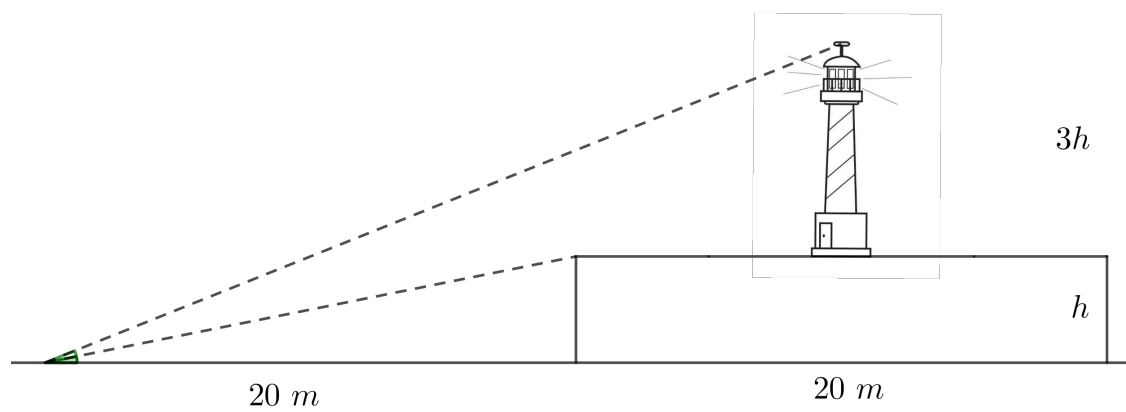


- 82 La distancia entre las bases de las torres KIO es de 115 metros. Calcula la altura de las torres si se sabe que desde la mitad de una de las torres se ve la parte superior de la otra torre bajo un ángulo de 40° y la parte inferior de la torre bajo un ángulo de 30° .



- 83 Un faro se encuentra justo en el centro de una plataforma elevada. Desde cierto punto se observa el punto más alto de la plataforma bajo un ángulo α con la horizontal. Desde ese mismo punto se observa el alero (el punto más alto) del faro bajo un ángulo 2α . Calcular la altura del faro sabiendo que ésta es el triple que la altura de la plataforma.

Puedes ayudarte de la representación que se te ofrece a continuación.



Números complejos

- 84 Realiza la siguiente operación, expresando el resultado final en forma polar.

$$\left(\frac{4 - 4\sqrt{3}i}{\sqrt{3} + i} \right)^6 =$$

- 85 Simplifica la siguiente fracción algebraica

$$\left(i + 1 - \frac{i^2}{i-1} \right) : \left(1 - \frac{i}{i-1} \right) =$$

- 86 Calcular el valor de k para que el número complejo $z = \frac{2+i}{k+1}$ esté en la diagonal del primer cuadrante.

- 87 Calcula las raíces cúbicas complejas siguientes.

$$\sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{9\sqrt{2}}{2}i}$$

- 88 De un número complejo z desconocido se sabe que una de sus raíces cúbicas es $z_1 = \sqrt{3} + i$. Se pide:

- a) Calcular z .
- b) Calcular sus otras dos raíces cúbicas.

- 89 De un número complejo desconocido sabemos que una de sus raíces cuartas es $2\sqrt{3} + 2i$. Se pide

- a) Calcular dicho número complejo.
- b) Calcular las otras tres raíces cuartas.

- 90 Dado el número complejo $z = -2 + 2\sqrt{3}i$, calcular:

- a) Su cuarta potencia.
- b) Sus cuatro raíces cuartas.

- 91 Dado el número complejo $z = \frac{1-i}{1+i}$ se pide:

- a) Escribir el número complejo en su forma polar.
- b) Calcular $\sqrt[3]{\frac{1-i}{1+i}}$

- 92 Utiliza la fórmula de Moivre para calcular $\cos(3\alpha)$ y $\sen(3\alpha)$.

93 Desarrollar y simplificar la siguiente expresión $(\sqrt{2} - i)^5$

94 De la siguiente ecuación polinómica

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 = 0$$

se sabe que una de sus soluciones es i . Calcula las otras tres soluciones.

95 Resuelve la ecuación en números complejos siguiente

$$z^4 + 4 = 0$$

IES Pradolongo

Geometría analítica

- 96 Un hexágono regular está situado por encima del eje OX . Dos de sus vértices son los puntos $A = (-2, 0)$ y $B = (2, 0)$. Calcula las coordenadas de los otros cuatro vértices
- 97 El teorema de Varignon afirma que en cualquier cuadrilátero $ABCD$ el cuadrilátero resultante de unir los puntos medios de los lados es un paralelogramo. Comprueba dicho teorema para el cuadrilátero de vértices: $A = (3, 1)$, $B = (5, -1)$, $C = (7, 5)$ y $D = (1, 3)$.

- 98 Dadas las rectas

$$r \equiv -2x + 4y + 3 = 0$$

$$s \equiv \begin{cases} x &= 2 - t \\ y &= 5 + at \end{cases}$$

Se pide:

- Determinar el valor de a para que las rectas sean paralelas.
 - Determinar el valor de a para que las rectas sean perpendiculares.
 - Calcular el ángulo que forman las rectas cuando $a = 0$.
- 99 Calcula un vector unitario que forme un ángulo de 30° con el eje OX .
- 100 Dada la recta de ecuación $2x + y = 3$, calcula otra recta que pase por el origen de coordenadas y que forme un ángulo de 30° con dicha recta.
- 101 Calcula el simétrico del punto $A = (1, 0)$ respecto la recta de ecuación $2x + y = 4$.
- 102 Calcula el simétrico del punto $A = (4, -1)$ respecto de la recta de ecuación $x + 2y - 7 = 0$.
- 103 Calcular el simétrico del punto $A = (3, 2)$ respecto de la recta de ecuación $r \equiv x - y + 5 = 0$.
- 104 Los puntos $B(3, 2)$ y $D(5, 4)$ son los vértices opuestos de un rombo. El vértice A está en el eje Y . Calcula los vértices A y C .
- 105 Un triángulo equilátero tiene dos de sus vértices en los puntos $A = (0, 0)$ y $B = (2, 2)$. Calcular las coordenadas del tercer vértice.
- 106 Un triángulo de $3\sqrt{2}$ de área presenta las siguientes características. El vértice A es el origen de coordenadas. El vértice B es $B = (1, 2)$. El vértice C está en la recta de ecuación $x + y = 3$. Calcular las coordenadas del tercer vértice.
- 107 Calcula el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al origen es el doble que la distancia al punto $A = (3, 0)$.

- 108 Dadas las siguientes rectas

$$r \equiv x - 2y + 1 = 0$$

$$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{3}$$

Calcular la ecuación de una recta que pase por el punto de intersección de ambas rectas y que forme el mismo ángulo con cada una de las rectas anteriores (es lo que se llama la bisectriz de dos rectas).

- 109 Se tienen los puntos $A = (3, 4)$, $B = (0, 1)$ y $C = (3, 0)$. Se pide calcular la ecuación de la recta de la bisectriz del ángulo $\hat{A}BC$.

- 110 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (2, 1)$ y forma un ángulo de 45° con la recta de ecuación $2x - 3y + 2 = 0$.

- 111 Dada la recta de ecuación $r \equiv x - 2y = 1$, se pide:

- Calcular el ángulo que esta recta forma con el eje OX .
- Calcular otra recta que pase por el punto de intersección de la recta r con el eje OX y que forme un ángulo de 20° con la recta r .

- 112 Dados los puntos $A(4, -2)$ y $B(10, 0)$, hallar el punto de la bisectriz de los cuadrantes 2° y 4° que equidistan de los dos.

- 113 Hallar las ecuaciones de las rectas que, pasando por el punto $A(-1, 2)$ disten 2 unidades del punto $B(3, 1)$.

- 114 Un cuadrado tiene dos vértices opuestos situados en las posiciones $A = (2, 1)$ y $C = (0, 5)$. Calcular las posiciones de los otros dos vértices.

- 115 Una recta de ecuación $r = x + 2y - 9 = 0$ es mediatriz de un segmento AB cuyo extremo A tiene por coordenadas $(2, 1)$. Hallar las coordenadas del otro extremo.

- 116 Un triángulo equilátero tiene dos de sus vértices en los puntos $A = (0, 0)$ y $B = (2, 2)$. Calcular las coordenadas del tercer vértice.

- 117 Calcular el ángulo que forman las siguiente rectas

$$r \equiv -2x + y + 3 = 0$$

$$s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 5 + t \end{cases}$$

- 118 Un tren sale desde la posición $(0, 2)$ a una velocidad constante dado por el vector $\vec{u} = (1, 2)$. Otro tren sale de la posición $(14, 5)$ a una velocidad constante dada por el vector $\vec{v} = (-2, 1)$. Se pide:

- ¿Se chocan los trenes?

En caso afirmativo;

- ¿Dónde se chocan?
- ¿Cuánto tiempo tardan en chocarse?

IES Pradolongo

Cónicas

- 119 Halla la ecuación reducida de la elipse que pasa por los puntos $A(2, 0)$ y $B(1, 1/3)$. Calcula su excentricidad y los vértices de la elipse.
- 120 Calcula la ecuación de una elipse centrada en el origen de excentricidad $1/2$ y con uno de sus focos en $F(3, 0)$.
- 121 Halla la ecuación reducida de la elipse centrada en el origen que tenga excentricidad 0.75 y tal que uno de sus focos sea $F = (2, 0)$.
- 122 Se tiene una hipérbola de ecuación $2x^2 - y^2 = 9$. Calcular su excentricidad y las posiciones de sus vértices y de sus focos
- 123 Halla la ecuación de la hipérbola que pasa por los puntos $(3, 0)$ y $(5, -3)$.
- 124 Calcular la ecuación reducida de una hipérbola sabiendo que pasa por los puntos $A(2, 0)$ y $B(4, \sqrt{3})$.
- 125 De una elipse sabemos que su semieje mayor mide 10 cm y su excentricidad es 0.6 . Se pide
- a) Ecuación reducida de la elipse.
 - b) Las coordenadas de sus focos.

Funciones

- 126) Calcula el dominio de la función $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x}$
- 127) Calcula el dominio de la función $f(x) = \ln(2x-4) - \frac{1}{x^2-9}$
- 128) A partir de la gráfica de la función $f(x) = \ln(x)$, representa la gráfica de las funciones
- a) $g(x) = |\ln(x)|$
b) $h(x) = \ln(x+1) + 3$
- 129) A partir de la gráfica de la función $f(x) = x^2$, representa la gráfica de las funciones
- a) $g(x) = |x^2 - 9|$
b) $h(x) = (x+2)^2 - 3$
- 130) A partir de la gráfica de la función $f(x) = \sin(x)$, representa la gráfica de las funciones
- a) $g(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$
b) $h(x) = \frac{\sin(x)}{2}$
- 131) Calcula los siguientes límites:
- a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{5x^2 - 13x - 6} =$
b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{2 - \sqrt{8-x}} =$
c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{2 - \sqrt{8-x}} =$
d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+7}}{2x} =$
e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{x^2+x} =$
- f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x}) =$
g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x}) =$
h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{x+5}\right)^{4x} =$
i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4-3x}{5-3x}\right)^{x-3} =$
j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x - 3^x}{4^x - 5^x} =$
- 132) Dibuja la gráfica de una función que cumpla lo indicado en los siguientes apartados.
- a) $f(2) = 4$ y $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$.
b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$.

Funciones. Continuidad con parámetros

- 133 Determina los valores de a y b para que la siguiente función sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + b & \text{si } -1 < x < 1 \\ \frac{a}{x-2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- 134 Determina los valores de a y b para que la siguiente función definida a trozos sea continua

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{b}{2x+1} & \text{si } -1 < x < 1 \\ b \ln(x) + \frac{a}{x} & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

- 135 Determina el valor de a para que la siguiente función definida a trozos sea continua

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \leq 2 \\ a \cdot \frac{x - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

- 136 Determina el valor de a y b para que la siguiente función definida a trozos sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - a(x+1) + a}{1-x} & \text{si } x < 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Funciones. Derivadas

- 137 Usando la definición de derivada, calcula la derivada de la función $f(x) = x^3$ en $x = 1$
- 138 Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
- | | |
|---------------------------------------|---|
| a) $f(x) = 3x^2 - x + 4$ | f) $f(x) = \tan(x^2 + 1)$ |
| b) $f(x) = \frac{5x}{5x + 4}$ | g) $f(x) = \arctan^2(2x + 1)$ |
| c) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{4x^2 + 5}}$ | h) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ |
| d) $f(x) = e^{3x^2}$ | i) $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$ |
| e) $f(x) = \tan^2(x + 1)$ | j) $f(x) = 10^{\sqrt{x}} \cdot \ln(\sqrt{x})$ |
- 139 Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 3x^2$ en el punto de la gráfica correspondiente a $x = 2$.
- 140 Calcula la fórmula de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \left(\frac{2x - 1}{2x + 1}\right)^2$ en $x = 0$.
- 141 Calcular el punto de la gráfica de la función $f(x) = -3x^2 + 7x - 2$ tiene una tangente que forma un ángulo de 45° con el eje OX.
- 142 Se tienen dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ derivables en todo su dominio de las que se tiene la siguiente información.
- | | | | |
|-------------|-------------|-------------|--------------|
| $f(1) = 2$ | $f(2) = 3$ | $f(3) = 4$ | $f(4) = 5$ |
| $f'(1) = 3$ | $f'(2) = 5$ | $f'(3) = 7$ | $f'(4) = 9$ |
| $g(1) = 0$ | $g(2) = 3$ | $g(3) = 6$ | $g(4) = 9$ |
| $g'(1) = 1$ | $g'(2) = 5$ | $g'(3) = 9$ | $g'(4) = 13$ |
- Se pide calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g \circ f$ en el punto de la gráfica correspondiente a $x = 1$.
- 143 Dadas las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = \sqrt{x}$ se pide:
- Calcular el punto de intersección de ambas gráficas.
 - Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto calculado en el apartado a).
 - Determinar un vector director de la anterior recta tangente.
 - Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $g(x)$ en el punto calculado en el apartado a).
 - Determinar un vector director de la anterior recta tangente.
 - Calcular el ángulo que forman estos vectores. (Es lo que se conoce como ángulo que forman dos gráficas en su punto de corte).

Problemas Funciones

- 144 El número de individuos, en millones, de una población viene dado por la función

$$f(t) = \frac{18 + t^2}{(t + 3)^2},$$

donde t es el tiempo medido en años desde $t = 0$. Calcula la población inicial y el tamaño de la población a largo plazo cuando el tiempo tiende a infinito.

- 145 Las funciones de oferta y demanda de un tipo de ordenador portátil vienen dadas, respectivamente, por $f_o(p) = 0,5p - 30$ y $f_d(p) = 600 - 0,25p$, donde p es el precio en euros.

- ¿Cuáles son las cantidades ofertadas y demandadas si el precio es de 500 euros?
- Representa las funciones de oferta y demanda y halla el precio de equilibrio.
- ¿A qué precio se estima que habrá el doble de ordenadores ofertados que demandados?

- 146 En el mercado de los alojamientos en casas rurales de una determinada zona se ha estimado que las funciones de demanda y oferta en función del precio, p , en euros, corresponden a:

$$f_o(p) = 240 - 2p \quad \text{y} \quad f_d(p) = 3p - 60.$$

- Indica cuáles serán el precio y la cantidad de equilibrio de ese mercado.
- Indica cuántas habitaciones desearán ocupar los turistas si se hiciese una promoción y, durante un fin de semana, se ofreciesen de forma gratuita.
- Señala cuál es el mínimo precio a partir del cual los poseedores de casas rurales están dispuestos a empezar a ofertarlas (por debajo de ese umbral no les compensa trabajar).
- ¿A qué precio se estima que queden 100 de las casas ofertadas vacías?

Problemas Optimización

- 147 Calcular los máximos y mínimos de la función $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$
- 148 Una huerta tiene actualmente 25 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. Se pide:
- a) La producción actual de la huerta.
 - b) La producción que se obtendría de cada árbol si se plantan x árboles más.
 - c) La producción a la que ascendería el total de la huerta si se plantan x árboles más.
 - d) ¿Cuál deber ser el número total de árboles que deben plantarse para maximizar la producción de la huerta?
 - e) ¿Cuál es en ese caso la producción máxima?
- 149 Queremos construir un triángulo apoyado en el suelo con dos vigas de acero de 30 metros cada una tales que una se apoye en la otra. Calcular el ángulo que debe formar cada viga con el suelo para que el área del triángulo sea máxima.
- 150 Un agricultor quiere vallar una superficie rectangular, uno de cuyos lados limita con un río. Solamente piensa vallar los tres lados restantes y quiere saber las dimensiones que debe tener dicho rectángulo para que el coste mínimo sea mínimo. Calcula dichas dimensiones sabiendo que el metro de valla vale a 8 euros y que la finca que quiere vallar debe tener una superficie de 2000 m^2 .
- 151 Calcular el valor de x para que el trapecio isósceles formado por tres lados de longitud dada a y otro lado de longitud x tenga área máxima.

Funciones. Representación gráfica

152 Calcular las asíntotas oblicuas de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$

153 Dada la función

$$f(x) = \frac{6x + 1}{2x - 4}$$

- a) Representa gráficamente la siguiente función de manera aproximada, determinando previamente sus asíntotas.
- b) Halla la función inversa de $f(x)$, es decir, $f^{-1}(x)$, y comprueba que se cumple: $f^{-1} \circ f(x) = x$.

154 Dada la función

$$f(x) = \frac{-2x - 8}{x + 2}$$

- a) Representa gráficamente la siguiente función, determinando previamente sus asíntotas.
- b) ¿Cuál será la forma de la función si queremos moverla de manera que, sin cambiar su forma, tenga las asíntotas en los ejes de coordenadas?

155 Dada la función $f(x) = e^{-x}(x^3 - x^2)$, se pide:

- a) Calcular los puntos de corte de su gráfica con los ejes.
- b) Calcular sus máximos y sus mínimos

156 Dada la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x$ se pide:

- a) Determinar su dominio.
- b) Calcular sus asíntotas.
- c) Identificar los puntos en los que se anula la derivada.
- d) Identificar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- e) Calcular sus máximos y sus mínimos.